ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS
(hoja 1 curso 07/08)

1. Sea el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ su base canónica. Se considera una familia de aplicaciones bilineales
$f_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya expresión matricial respecto de la base B es

$$f_k(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}^t \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{y},$$

1. Hallar los valores de k para los cuales f_k es un producto escalar.
2. Para el caso $k = 2$, $f_2(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{y}$, se pide
   (a) El módulo del vector $\overrightarrow{x} = (0, 1, 2)$.
   (b) El ángulo que forma $\overrightarrow{x}$ con $\overrightarrow{y} = (1, 1, 3)$.
   (c) Un vector unitario perteneciente a $L(\{\overrightarrow{x}\})$.
   (d) Un vector ortogonal a $\overrightarrow{x}$.

2. Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial euclídeo y $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ su base canónica.
Hallar la matriz del producto escalar sabiendo que:
$\| \overrightarrow{e_1} \| = 1, \| \overrightarrow{e_2} \| = \sqrt{2}, \| \overrightarrow{e_3} \| = \sqrt{2}$,
$\overrightarrow{e_1} \cdot (\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}) = 4$
$\overrightarrow{e_1}$ y $\overrightarrow{e_3}$ son ortogonales
$\overrightarrow{e_2}$ con $\overrightarrow{e_3}$ forma un ángulo de 60°

3. Sea el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ su base canónica.
Se considera una familia de aplicaciones bilineales $f_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya expresión matricial respecto de la base B es

$$f_k(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x}^t \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} \overrightarrow{y}$$

Para $k = 2$, sea G la matriz asociada a f_2 respecto de B.
Se pide:

1. Los valores de k para los cuales f_k es un producto escalar.
2. Determinar a,b y c para que $B' = \{\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 0), \overrightarrow{u_2} = (1, a, 0), \overrightarrow{u_3} = (1, b, c)\}$ sea una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto de f_2.

3. Matriz del producto escalar f_2 respecto de la base B' de $\mathbb{R}^3, G'$. ¿Qué relación hay entre G y G'?.

4. Si V es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $S = \{(1,1,0),\ (0,-1,1)\}$ hallar el complemento ortogonal de V respecto de f_2.

5. Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la base B'.

4. En el espacio vectorial euclídeo $V(\mathbb{R})$ con base ortonormal $B = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ se considera el subespacio vectorial $W = \{\overrightarrow{x} \in V / x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$. Obtén la proyección ortogonal del vector $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - 3\overrightarrow{e_4}$ sobre el subespacio W.

5. En el espacio vectorial euclídeo de los polinomios de grado menor o igual que uno $\mathbb{P}_1[x]$ se considera el siguiente producto escalar

$$P(x) \cdot Q(x) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx, \qquad P(x), Q(x) \in \mathbb{P}_1[x]$$

Se pide:

1. Matriz del producto escalar respecto de la base $B = \{1, x\}$.

2. Ángulo que forman los polinomios $x + 3$ y $2x + 4$.

3. Una base ortonormal a partir de B.

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS
(hoja 2 curso 07/08)

6. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^2$ con base ortonormal B se considera el triángulo T cuyos lados vienen dados por los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$.

1. Calcula la altura y el área del triángulo T.
2. Demuestra que si dos ángulos de un triángulo son iguales los lados opuestos a dichos ángulos son iguales.
3. Demuestra que si dos lados de un triángulo son iguales los ángulos opuestos a dichos lados son iguales.

7. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con base ortonormal B se considera el paralelogramo P cuyos lados vienen dados por los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{d}$.

1. Demuestra que los lados opuestos de un paralelogramo P son iguales.
2. Halla la altura y el área de P.
3. Ilustra con un ejemplo los apartados anteriores.

8. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}| \leq \| \overrightarrow{x} \| + \| \overrightarrow{y} \|$$

9. Ley del paralelogramo.

La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual al doble de la suma de los cuadrados de los lados.

$$\| \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \|^2 + \| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \|^2 = 2 \| \overrightarrow{x} \|^2 + 2 \| \overrightarrow{y} \|^2$$

10. Teorema de Pitágoras.

El área del cuadrado con base en la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados cuyas bases descansan sobre los otros dos lados del triángulo.

$$\| \overrightarrow{l_1} - \overrightarrow{l_2} \|^2 = \| \overrightarrow{l_1} \|^2 + \| \overrightarrow{l_2} \|^2$$

11. Desigualdad de Ptolomeo.

En todo cuadrilátero el producto de las diagonales es menor o igual que la suma de lo productos de los lados opuestos.

$$\| \overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} \| \| \overrightarrow{z} - \overrightarrow{t} \| \leq \| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{t} \| \| \overrightarrow{z} - \overrightarrow{y} \| + \| \overrightarrow{y} - \overrightarrow{t} \| \| \overrightarrow{z} - \overrightarrow{x} \|$$